Síntese do Material de Mecânica

Daniel Carlos Souza Santos

March 2024

Sumário

1 Newton e Mach

Newton, no século 17, formulou as leis da mecânica. Para conseguir elaborar essas leis, ele teve de definir os conceitos fundamentais de espço e de tempo como sendo absolutos e fixos, oque para sua época era bastante evidente, e também confortável de se trabalhar do ponto de vista matemático. As leis de Newton foram construidas para valer em um referencial inercial, sendo elas invariantes sobre as transformações de Galileu. Para entendermos isso bem vamos primeiro definir oque é um referencial inercial.

1.1 Referenciais inierciais

Do ponto de vista newtoniano, um referencial inercial pode ser definido como um *sistema de referência que isolado está em repouso com relação ao espaço absoluto, ou se movendo em velocidade constante com relação a ele.* Newton definiu o centro do sol como um sistema de tal natureza, com seus eixos apontando para as estrelas distantes.

As transformações que levam de um referêncial inercial a outro são chamadas de transformções de Galileu, e podem ser esccritas como

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}t \tag{1}$$

Elas definem toda a classe dos referenciais nos quais valem as leis de Newton mostradas a seguir.

1.2 Leis de Newton

1.2.1 Primeira Lei de Newton

Todo corpo preserva seu estado de repouso ou movimento uniforme em linha reta a não ser que uma ação externa seja realizada sobre ele.

1.2.2 Segunda Lei de Newton

Uma alteração no movimento é proporcional a força imprimida.

1.2.3 Terceira Lei de Newton

Para toda ação sempre existe uma reação igual em módulo e de orientação oposta. Vale ressaltar também que no contexto da mecânica newtoniana, 2 tipos de principais de forças aparecem. Elas são, a força gravitacional, e a força elástica.

$$\begin{aligned} F &= G\left(\tfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\right)\tfrac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} \\ F &= k|\vec{r}_1-\vec{r}_2| \end{aligned} \tag{2}$$

1.3 Críticas de Mach

As ideias a respeito da natureza do espaço e do tempo absoluto foram duramente criticadas por Ernst Mach. Mach baseava sua crítica no fato de Newton não definir uma relação entre os referencias inerciais e a distribuição de matéria no universo. Essas críticas, apesar de mal sucedidas, abriram os olhos dos físicos para a possibilidade de se mexer nas fundações da física, algo que na época parecia impensável.

2 Lagrange

Em seu livro Analytic Mechanics, publicado em 1788, Lagrange deduziu a famosa equação que leva seu nome. Para demosntrar ela tomemos um sistema de referencia inercial. Nesse sistema, a segunda lei de Newton toma a seguinte forma

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i}, i = 1, 2 \cdots N \tag{3}$$

Seja $\vec{r} = \vec{r}(q_1, \cdots, q_n, t)$ com q_j sendo as $n = 3N$ coordenadas generalizadas para N corpos, vem:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{q_j} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_i} \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{q_j} \tag{4}$$

O lado esquerdo da equação pode ser escrito como :

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r_i}}{q_j} = \frac{d}{dt}\left[m_i \vec{v_i} \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}\right] - m_i v_i \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j}\right] \tag{5}$$

E a velocidade em função das coordenadas generalizadas pode ser obtida através da regra da cadeia :

$$\vec{v_i} = \frac{d\vec{r_i}}{dt}(q_j, t) = \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial t} \tag{6}$$

Fazendo a derivada parcial com respeito a $\dot{q}_j$ obtemos a seguinte relação:

$$\frac{\partial \overrightarrow{v_i}}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \overrightarrow{r_i}}{\partial q_j} \tag{7}$$

Agora, para todas as peças se encaixarem, precisamos saber se podemos tirar a derivada temporal de dentro da parcial sobre q_j. A resposta curta é sim, nos estamos na física, onde tudo comuta ! Só que o mundo não foi construído com respostas curtas, e sim com esforço de gente que sabia oque estava fazendo, então vamos lá:

$$\frac{\partial \overrightarrow{v_i}}{\partial q_v} = \frac{\partial^2 \overrightarrow{r_i}}{\partial q_v \partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \overrightarrow{r_i}}{\partial q_v \partial t} \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \overrightarrow{r_i}}{\partial q_v}(q_j, t)\right] = \frac{\partial^2 \overrightarrow{r_i}}{\partial q_v \partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial^2 \overrightarrow{r_i}}{\partial q_v \partial t} \Longrightarrow \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \overrightarrow{r_i}}{\partial q_v}(q_j, t)\right] = \frac{\partial \overrightarrow{v_i}}{\partial q_v} \tag{10}$$

Então, agora que já temos tudo que precisamos, coloquemos (8) e (11) no lado direito de (6) :

$$\frac{d}{dt}\left[m_i v_i \frac{\partial \overrightarrow{v_i}}{\partial \dot{q}_j}\right] - m_i \overrightarrow{v_i} \frac{\partial \overrightarrow{v_i}}{\partial q_j} = -\frac{\partial U}{\partial \overrightarrow{r_i}} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{r_i}}{\partial q_j} \Rightarrow \tag{11}$$

$$-\frac{\partial U}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}(\frac{1}{2} m_i {v_i}^2)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2} m_i {v_i}^2\right) \tag{12}$$

Disso definimos $T = \frac{1}{2} m_i {v_i}^2$ e como $U = U(q_j)$ temos que $\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_j} = 0$. Logo podemos escrever a equação anterior como :

$$0 = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\left(\frac{1}{2} m_i {v_i}^2 - U\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{1}{2} m_i {v_i}^2 - U\right) \tag{13}$$

E para finalizar, definindo $L = T - U$, a famosa função lagrangeana, ficamos com :

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right] = 0 \tag{14}$$

Como a demonstração acima foi feita considerando apenas uma coordenada generalizada por vez, para as 3N que existem no sistema, concluímos que para cada coordenada generalizada vem uma equação de Lagrange correspondente.

Vale também ressaltar que o estado mecânico de um sistema é completamente descrito por suas coordenadas generalizadas e suas velocidades generalizadas, logo faz sentido apenas q_j e $\dot{q}_j$ aparecerem na equação. Essa equação hoje recebe o nome de equação de Euler-Lagrange devido a Euler ter as demonstrado usando ideias de calculo variacional, conforme mostrado a seguir.

3 Euler

Leonhard Euler, dentro do contexto do problema da catenária, encontrou uma forma mais geral de se obter a equação (15). Para isso ele partiu do princípio da ação estacionária, que diz *o caminho escolhido por uma particula em movimento é tal que nele a ação é um extremo.* A ação é definida conforme :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \tag{15}$$

E o princípio da ação estacionária pode ser escrito como :

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt = 0 \tag{16}$$

No caso delta representa uma pequena variação sobre o caminho mínimo. Ou seja : $q \Rightarrow q + \delta q$ e $\dot{q} \Rightarrow \dot{q} + \delta\dot{q}$ e como os caminhos novos e antigos devem coincidir nas extremidades, ficamos com $\delta q_1 = \delta q_2 = 0$. Disso, podemos abrir $\delta S = 0$ em séries de Taylor sob q e $\dot{q}$ em primeira ordem (já que os termos de ordem superior são muito pequenos quando comparados aos demais) e prosseguir :

$$\delta S = 0 = \int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \tag{17}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q}\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\ dt = 0 \tag{18}$$

Fazendo $\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q$ e abrindo o segundo termo da equação em partes vem :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q}\delta q\ dt + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\delta q\bigg|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\delta q\ dt = 0 \tag{19}$$

O termo do meio vai a zero pois $\delta q_1 = \delta q_2 = 0$, logo a expressão fica :

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial q}\delta q - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\delta q\ dt = 0 \tag{20}$$

Finalmente evidenciando δq e dt :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right]\right)\ \delta q dt = 0 \tag{21}$$

Para qualquer variação arbitrária δq a integral deve ser 0 . Logo o termo de dentro deve ser 0 sempre. O resultado é a equação (15).

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] = 0 \tag{22}$$

Conforme o raciocínio explicado no fim da seção anterior, para cada coordenada generalizada do sistema vem uma equação de movimento dessa forma. Agora estamos prontos para detalhar o trabalho de Hamilton.

4 Hamilton

O momento generalizado é definido por $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$. E a função de Halmilton como a seguinte transformada de Legendre de L:

$$H = p_i\dot{q}_i - L \tag{23}$$

Abrindo o diferencial associado a $H = H(q_i, p_i, t)$:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial H}{\partial t}dt \tag{24}$$

E passando o operador d em (24) :

$$dH = -\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} \tag{25}$$

Igualando termo a termo vem as equações de Hamilton :

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{26}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{27}$$

$$-\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{28}$$

Se H não depende explicitamente do tempo podemos escrever $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ e como $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i$, usando as equações (26 e 27) vem que $\frac{dH}{dt} = 0$ oque mostra que a função H é fixa no tempo. Vale salientar que as equações (26, 27 e 28) podem ser obtidas substituindo $L = p_i q_i - H$ na integral referente ao princípio da ação mínima.

5 Poisson e Jacobi

Se durante o movimento o valor de uma certa função se conservar $f(q,p,t) = cte$ então isso é conhecido como um movimento integral. Para encontrar uma equação do movimento para a função f fazemos :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i = 0 \tag{29}$$

Colocando (26) e (27) em (29)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \tag{30}$$

Definamos $(f,g) = \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}$. Também conhecida como parêntesis de Poisson, essa abstração tem as mesmas propriedades de um determinante por se tratar de um. É interessante notar que $(q_i,q_j) = 0, (p_i,p_j) = 0, (q_i,p_j) = \delta_{ij}$ e que a equação (30) pode ser escrita como :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (f,H) = 0 \tag{31}$$

5.1 Conclusão

A descoberta dos métodos Lagrangeano e Hamiltoneano na mecânica clássica conseguiram estender a física clássica a outros fenômenos. Também facilitaram a resolução de problemas e abriram caminho para o formalismo que futuramente seria usado ´por teorias como a Mecânica Quântica e a QFT.